

۱- اگر α زاویه‌ای در دایره‌ی مثلثاتی، $\cot \alpha = \sqrt{\frac{m}{n}} - 1$ و $\cos \alpha = \sqrt{1 - m^2}$ باشد، رابطه‌ی بین m و n کدام است؟ (عبارت‌ها تعریف شده‌اند.)

- ۱ $m = n^2$
 ۲ $m = n^3$
 ۳ $n = m^2$
 ۴ $n = m^3$

۲- حاصل عبارت $A = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + (\sqrt{2} \sin \alpha \cos \alpha)^2$ همواره کدام است؟

- ۱ -1
 ۲ صفر
 ۳ 1
 ۴ $1 + \tan^2 \alpha$

۳- اگر $\frac{\cot^2 \alpha + 11}{\cot^2 \alpha + \cot \alpha} = \frac{7}{15}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + 1 \cdot \sin^3 \alpha}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{7}{15}$
 ۲ $\frac{15}{7}$
 ۳ $\frac{30}{17}$
 ۴ 2

۴- حاصل عبارت $\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} - (\tan x + \cot x)^2$ کدام است؟

- ۱ -2
 ۲ 2
 ۳ -1
 ۴ صفر

۵- حاصل $(1 - \sin^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta)$ کدام است؟

- ۱ صفر
 ۲ 1
 ۳ $\cos^2 \theta$
 ۴ $\cot^2 \theta$

۶- حاصل عبارت A کدام است؟ $(\cos \theta \neq 0)$
 $A = (1 + \sin \theta) \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right) (1 - \sin \theta)^2$

- ۱ $\tan \theta \sin \theta$
 ۲ $\cos^2 \theta$
 ۳ $\frac{1 + \sin^2 \theta}{\cos \theta}$
 ۴ $\cos^3 \theta$

۷- حاصل عبارت $\frac{\sin 1}{\cos 1} \times \frac{\sin 2}{\cos 2} \times \dots \times \frac{\sin 89}{\cos 89}$ کدام است؟!

- ۱ 1
 ۲ 0
 ۳ -1
 ۴ ∞

۸- حاصل عبارت زیر همواره برابر با کدام گزینه است؟

$1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha = ?$

- ۱ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$
 ۲ $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$
 ۳ $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + \sin \alpha \cos \alpha$
 ۴ $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2$

۹- اگر $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$ باشد، $\tan \alpha - \cot \alpha$ کدام است؟!

- ۱ $\frac{3}{2}$
 ۲ 1
 ۳ $\frac{1}{2}$
 ۴ صفر

۱۰- حاصل عبارت $\tan^2 \theta + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta} \times \frac{1}{1 + \tan \theta}$ کدام است؟

- ۱ $\sin \theta$
 ۲ $\frac{1}{\sin^2 \theta}$
 ۳ $\cos \theta$
 ۴ $\frac{1}{\cos^2 \theta}$

۱۱- خط l به معادله‌ی $(m-1)y + (2m-1)x = 1$ با جهت مثبت محور x زاویه‌ی 45° می‌سازد. این خط محور y ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

- ۱ $-\frac{1}{3}$
 ۲ $-\frac{2}{3}$
 ۳ -3
 ۴ $\frac{1}{3}$



۱۲- اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin^3 x + \cos^3 x$ است؟

- ① $\frac{13}{27}$ ② $\frac{17}{27}$ ③ $\frac{17}{81}$ ④ $\frac{17}{81}$

۱۳- اگر $\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{3}{5}$ باشد، حاصل $\sin^4 x + \cos^4 x$ کدام است؟

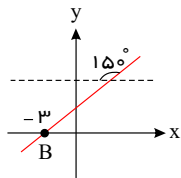
- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{3}{7}$

۱۴- در مثلث قائم الزاویه $\triangle ABC$ که در رأس A قائمه است. حاصل عبارت $1 - (\cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C})$ کدام است؟

- ① ۳ ② ۲ ③ ۱ ④ صفر

۱۵- معادله‌ی خطی که با جهت مثبت محور x زاویه‌ی 60° می‌سازد و عرض از مبدأ آن ۲ است، کدام است؟

- ① $y = 2 - \sqrt{3}x$ ② $y - \sqrt{3}x = 2$ ③ $y + \sqrt{3}x = 3$ ④ $y = 3 + \sqrt{3}x$



۱۶- اگر نمایش معادله‌ی خط $ax - \sqrt{3}y + c = 0$ به صورت زیر باشد، حاصل $a.c$ کدام است؟

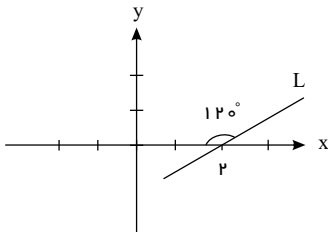
- ① ۱ ② $\sqrt{3}$ ③ ۳ ④ $2\sqrt{3}$

۱۷- حاصل $\frac{1 + \sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ}{1 + \tan 20^\circ \tan 70^\circ}$ کدام است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

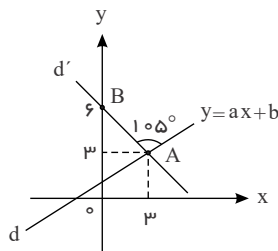
۱۸- مطابق شکل زیر، اگر خط L از نقطه $(3, a)$ بگذرد، a کدام است؟

- ① ۲ ② $\sqrt{3}$ ③ ۱ ④ $\sqrt{2}$



۱۹- در شکل مقابل مقدار $b(a+1)$ کدام است؟

- ① -۶ ② $\frac{15}{4}$ ③ ۲ ④ $\frac{3}{4}$



۲۰- خطی که با جهت منفی محور x زاویه‌ی 135° درجه می‌سازد و از نقطه $(-3, 5)$ می‌گذرد، محور x ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

- ① ۸ ② -۸ ③ ۲ ④ -۲



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

$$\begin{aligned} \sin^r \alpha + \cos^r \alpha &= 1 \\ 1 + \cot^r \alpha &= \frac{1}{\sin^r \alpha} \end{aligned}$$

$$\sin^r \alpha + \cos^r \alpha = 1 \Rightarrow \cos^r \alpha = 1 - \sin^r \alpha \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \sqrt[1/r]{1 - \sin^r \alpha} \\ \cos \alpha = \sqrt[1/r]{1 - \sin^r \alpha} \end{cases}$$

چون $\cos \alpha$ در مسئله بصورت یک رادیکال داده شده و مثبت است، مقدار مثبت را می‌پذیریم:

$$\cos \alpha = \sqrt[1/r]{1 - \sin^r \alpha} = \sqrt[1/r]{1 - m^r} \xrightarrow{()^r} 1 - \sin^r \alpha = 1 - m^r \Rightarrow \sin^r \alpha = m^r$$

از طرفی: $1 + \cot^r \alpha = \frac{1}{\sin^r \alpha} \Rightarrow 1 + \left(\sqrt{\frac{m}{n} - 1}\right)^r = \frac{1}{m^r}$

$$\Rightarrow 1 + \frac{m}{n} - 1 = \frac{1}{m^r} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{1}{m^r} \Rightarrow m^r = n$$

۲ - گزینه ۳

$$\sin^r x + \cos^r x = 1 \quad \text{بهریم}$$

$$A = (\sin^r \alpha + \cos^r \alpha)^r - r \sin^r \alpha \cos^r \alpha + r \sin^r \alpha \cos^r \alpha$$

$$\Rightarrow A = (\sin^r \alpha + \cos^r \alpha)^r = 1^r = 1$$

۳ - گزینه ۲ با تقسیم عبارت ها بر $\sin^r \alpha$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + 1 \circ \sin^r \alpha} &\stackrel{\div \sin^r \alpha}{=} \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin^r \alpha}}{\frac{\sin \alpha + 1 \circ \sin^r \alpha}{\sin^r \alpha}} = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \times \frac{1}{\sin^r \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\sin^r \alpha} + \frac{1 \circ \sin^r \alpha}{\sin^r \alpha}} \\ &= \frac{\cot \alpha (1 + \cot^r \alpha)}{\frac{1}{\sin^r \alpha} + 1 \circ} = \frac{\cot \alpha (1 + \cot^r \alpha)}{(1 + \cot^r \alpha) + 1 \circ} = \frac{\cot \alpha + \cot^r \alpha}{1 + \cot^r \alpha} = \frac{15}{7} \end{aligned}$$

۴ - گزینه ۱

$$\frac{\sin^r x + \cos^r x}{\sin^r x \cos^r x} - (\tan x + \cot x)^r =$$

$$\frac{\sin^r x}{\sin^r x \cos^r x} + \frac{\cos^r x}{\sin^r x \cos^r x} - \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)^r =$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin^r x}{\cos^r x} + \frac{\cos^r x}{\sin^r x} - \left(\frac{\sin^r x}{\cos^r x} + \frac{\cos^r x}{\sin^r x} + r \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{\cos x}{\sin x}\right) \\ = \frac{\sin^r x}{\cos^r x} + \frac{\cos^r x}{\sin^r x} - \frac{\sin^r x}{\cos^r x} - \frac{\cos^r x}{\sin^r x} - r = -r \end{aligned}$$

۵ - گزینه ۲

$$(1 - \sin^r \theta)(1 + \tan^r \theta) = (\cos^r \theta) \left(\frac{1}{\cos^r \theta}\right) = 1$$

۶ - گزینه ۴

$$\begin{aligned} \sin^r \theta + \cos^r \theta &= 1 \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \end{aligned}$$



$$\underbrace{(1 + \sin \theta)}_{\text{مزدوج}} \left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \underbrace{(1 - \sin \theta)}_{\text{مزدوج}} (1 - \sin \theta)$$

$$= \underbrace{(1 - \sin^2 \theta)}_{\cos^2 \theta} \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right) (1 - \sin \theta) = \frac{\cos^2 \theta (1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{\cos \theta} = \cos \theta \times \cos^2 \theta = \cos^3 \theta$$

۷ - گزینه ۱

$$\alpha + \beta = 90 \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta$$

می‌دانیم در ضرب خاصیت جابجایی وجود دارد؛
پس عبارت بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin 1}{\cos 1} \times \frac{\sin 2}{\cos 2} \times \dots \times \frac{\sin 89}{\cos 89} \\ \sin 1 = \cos 89 \Rightarrow \frac{\sin 1}{\cos 89} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 \times 1 \times \dots \times 1 = 1$$

۸ - گزینه ۳

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 - \sin \alpha \cos \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + \sin \alpha \cos \alpha$$

۹ - گزینه ۴

$$\tan \alpha + \cot \alpha = 2 \rightarrow \tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} = 2$$

$$\frac{\tan^2 \alpha + 1}{\tan \alpha} = 2 \rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = 2 \tan \alpha \rightarrow \tan^2 \alpha + 1 - 2 \tan \alpha = 0$$

$$(\tan \alpha - 1)^2 = 0 \rightarrow \tan \alpha - 1 = 0 \rightarrow \tan \alpha = 1 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = 1$$

$$\tan \alpha - \cot \alpha = 1 - 1 = 0$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \text{۱۰ - گزینه ۴}$$

$$\tan^2 \theta + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta} = \tan^2 \theta + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta} = \tan^2 \theta + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta} = \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

۱۱ - گزینه ۲ اگر خطی با جهت مثبت محور x ها زاویه α بسازد، شیب آن $\tan \alpha$ است.

$$(m-1)y + (2m-1)x = 1 \Rightarrow (m-1)y = -(2m-1)x + 1$$

$$\xrightarrow{\times(m-1)} y = -\frac{2m-1}{m-1}x + \frac{1}{m-1}$$

$$\text{شیب خط} = -\frac{2m-1}{m-1} = \tan 45 = 1 \Rightarrow -2m+1 = m-1 \Rightarrow -3m = -2 \Rightarrow m = \frac{2}{3}$$

پس معادله‌ی خط بصورت زیر در می‌آید:

$$\text{محل تقاطع خط با محور } y \text{ ها: } \xrightarrow{x=0} -\frac{1}{3}y = 1 \Rightarrow y = -3$$

۱۲ - گزینه ۱

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9} \rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{-8}{9} \rightarrow \sin x \cos x = \frac{-4}{9}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) = \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{-4}{9} \right) \right) = \frac{1}{3} \times \frac{13}{9} = \frac{13}{27}$$

۱۳ - گزینه ۳

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \xrightarrow{(\quad)^2} \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1$$

$$\frac{3}{5} + 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 \rightarrow 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{2}{5} \rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{5}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x)$$

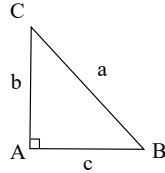


$$= 1 \times \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{5}$$

$$*: a^r + b^r = (a^r + b^r)(a^r + b^r - a^r b^r)$$

۱۴ - گزینه ۴

با توجه به شکل روبرو داریم:



$$\cos \widehat{B} = \frac{c}{a}, \cos \widehat{C} = \frac{b}{a}$$

$$1 - (\cos^r B + \cos^r C) = 1 - \left(\frac{c^r}{a^r} + \frac{b^r}{a^r} \right) = 1 - \left(\frac{b^r + c^r}{a^r} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه فیثاغورث}} 1 - \left(\frac{a^r}{a^r} \right) = 1 - 1 = 0$$

$$b^r + c^r = a^r$$

۱۵ - گزینه ۲

شیب خطی که باجهت مثبت محور x ها زاویه‌ی θ بسازد برابر $\tan \theta$ است

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \left| \begin{array}{l} \text{بگذرد، عبارتست از} \\ \text{معادله‌ی خطی که با شیب } m \text{ از نقطه } (x_0, y_0) \end{array} \right.$$

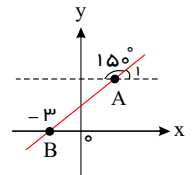
$$\text{شیب خط} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

عرض از مبدأ ۲ است. یعنی خط از نقطه‌ی $(0, 2)$ می‌گذرد.

$$\text{معادله‌ی خط: } y - 2 = \sqrt{3}(x - 0)$$

$$y = \sqrt{3}x + 2 \Rightarrow y - \sqrt{3}x = 2$$

۱۶ - گزینه ۳ با توجه به شکل داریم:



$$15^\circ + \widehat{A} = 18^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$$

$$\Rightarrow \text{شیب خط} = m = \tan \widehat{A} = \tan 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y - y_B = m(x - x_B) \Rightarrow y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - (-3))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{3}}{3}x - y + \sqrt{3} = 0 \\ ax - \sqrt{3}y + c = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - \sqrt{3}y + 3 = 0 \\ ax - \sqrt{3}y + c = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow a = 1, c = 3 \Rightarrow a.c = 3$$

۱۷ - گزینه ۱

سینوس و کسینوس زوایای متمم با یکدیگر برابر است. پس: $\cos 70^\circ = \sin 20^\circ$, $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$

$$\frac{1 + \sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ}{1 + \tan 20^\circ \tan 70^\circ} = \frac{1 + \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ}{1 + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} \times \frac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ}} = \frac{1 + 1}{1 + 1} = 1$$

۱۸ - گزینه ۲

شیب خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد.

خط با جهت مثبت محور x ها زاویه‌ی 60° می‌سازد. پس:

$$\text{شیب} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

پس معادله‌ی خط به فرم $y = \sqrt{3}x + h$ خواهد بود. از طرفی نقطه‌ی $(2, 0)$ روی خط واقع است. پس:

$$\Rightarrow 0 = \sqrt{3} \times 2 + h \Rightarrow h = -2\sqrt{3}$$

و معادله‌ی خط به صورت زیر خواهد بود:

$$y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$$

حال مختصات $(3, a)$ را در آن قرار می‌دهیم:

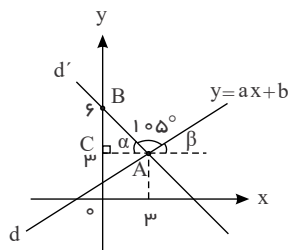
$$a = \sqrt{3} \times 3 - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

۱۹ - گزینه ۳

می‌دانیم: شیب خطی که با جهت مثبت محور x زاویه α بسازد برابر است با $m = \tan \alpha$

معادله خط با شیب m و عرض از مبدأ b برابر است با $y = mx + b$

مطابق شکل زیر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:



$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{3} = 1 \xrightarrow{\alpha \text{ حاده است}} \alpha = 45^\circ$$

$$\alpha + 105^\circ + \beta = 180^\circ \xrightarrow{\alpha = 45^\circ} \beta = 30^\circ$$

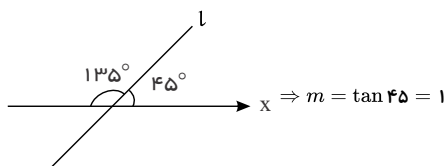
زاویه‌ای که خط d با جهت مثبت محور x می‌سازد را به دست می‌آوریم:

۲۰ - گزینه ۲

می‌دانیم: شیب خطی که با جهت مثبت محور x زاویه α بسازد برابر است با $\tan \alpha$

معادله خط با شیب m و گذرا از نقطه (x_0, y_0) برابر است با: $y - y_0 = m(x - x_0)$

خطی که با جهت منفی محور x زاویه 135° درجه می‌سازد، با جهت مثبت محور x زاویه 45° می‌سازد.



$$y - 5 = 1(x + 3) \Rightarrow y = x + 8$$

طول تلاقی با محور x ها $x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳

۴ - ۱

۷ - ۱

۱۰ - ۴

۱۳ - ۳

۱۶ - ۳

۱۹ - ۳

۲ - ۳

۵ - ۲

۸ - ۳

۱۱ - ۲

۱۴ - ۴

۱۷ - ۱

۲۰ - ۲

۳ - ۲

۶ - ۴

۹ - ۴

۱۲ - ۱

۱۵ - ۲

۱۸ - ۲